数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 58-66

超特異な素点における保型形式の岩澤理論

東大数理　小林　真一 (KOBAYASHI Shin-ichi)

1　目的

本稿では, 保型形式の $a_p=0$ を満たす良い p における岩澤主予想の新しい定式化を紹介する. f を正規化された newform

$$f=\sum_{n\geq 1}a_nq^n\in S_k(X_1(N))\otimes\mathbb{C}\quad(k\geq 2),$$

p を N を割らない奇素数とする. また簡単のため任意の n に対し $a_n\in\mathbb{Q}$ と仮定する. 保型形式の岩澤主予想とは, f に伴う Selmer 群が, 円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大を通して, f の p-進 L-関数と結びつくというものである. Selmer 群は保型形式 f の深い数論的情報をもっており, 一方 p-進 L-関数は f に伴うゼータ関数の特殊値の p-進的性質を反映するものである. とくに ordinary と呼ばれる $p\nmid a_p$ という条件下では, この予想は素朴な形で定式化される. ordinary でなくても $a_p=0$ を満たす p ならば, 同様に主予想の素朴な定式化が可能であることを紹介するのが本稿の目的である. 楕円曲線に対応する場合 $(k=2)$ では, a_p の絶対値の評価から, p が 5 以上で超特異還元をもつ場合は, 自動的に $a_p=0$ であることに注意しておく.

weight k が大きいときは, $p \mid a_p$ だが $a_p \neq 0$ という場合が一般的に起こり得るが, この場合は本稿で紹介するような素朴な主予想の定式化は知られていない.

なお本稿で引用されている基本的な事実等は Kato [2] を参照していただきたい.

2 Selmer 群, p-進 L-関数

この節では f に伴う Selmer 群と p-進 L-関数について思い出す.

V を f に伴う Galois 表現, つまり連続 $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 作用をもつ 2 次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間 V で, N を割らない任意の l に対し $\mathrm{trace}((\mathrm{Frob}_l)|_V) = a_l$ となるものとする. T を V の $G_{\mathbb{Q}}$-stable lattice とする. このとき任意の代数体 K と任意の整数 r に対し Selmer 群 $\mathrm{Sel}(K, T(r))$ が次で定義される.

$$\mathrm{Sel}(K, T(r)) := \mathrm{Ker}\left(H^1(K, V/T(r)) \longrightarrow \oplus_v \frac{H^1(K_v, V/T(r))}{\mathrm{Im}\, H^1_f(K_v, V(r))} \right).$$

ここで $T(r)$ は T の Tate ひねりを意味し, $H^1(-,-)$ は Galois cohomology 群, v は K の素点で, 直和は K のすべての素点をわたる. $H^1_f(K_v, V(r))$ は Bloch-Kato [1] による $H^1(K_v, V(r))$ の部分群である. 楕円曲線の場合は, 局所有理点がなす群の Kummer 写像による H^1 への像と一致するので, 定義を述べるより, その一般化と思っていただいたほうがよいだろう.

$\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の位相生成元 γ を固

定し, 群環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})]]$ と一変数冪級数環 $\mathbb{Z}_p[[X]]$ を γ を $1+X$ に対応させることで同一視する.

$\mathbb{Q}_\infty$ 上の Selmer 群 $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}_\infty, T)$ を $\varinjlim_n \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), T(r))(-r)^\Delta$ で定義し, その Pontryagin 双対を $\mathscr{X}(\mathbb{Q}_\infty, T)$ とおく. ここで r は $1 \leq r \leq k-1$ を満たす整数で, $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}_\infty, T)$ は r の取り方によらない. また右上の Δ は自然な $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$-作用による固定部分をあらわす. このとき Selmer 群 $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}_\infty, T)$ は自然な Galois 作用により有限生成 Λ-加群になることが知られている.

f に伴う p-進 L-関数を思い出そう. α を p-Euler factor $X^2 - a_pX + p^{k-1}$ の根で $\mathrm{ord}_p(\alpha) < k-1$ を満たすものとする. また $\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元 (ζ_{p^n}), つまり ζ_{p^n} は 1 の原始 p^n 乗根で $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ を満たすものを固定する. Ω を f の実周期とする. Ω の取り方には $\mathbb{Q}^\times$ の曖昧さがあるが, 本稿では簡単のため μ-不変量の曖昧さを許した主予想の定式化をするので, とくに気にしないことにする. Canonical period を使ってこの曖昧さを除くことも可能である.

このとき以下を満たす p-進 L-関数 $\mathscr{L}_p(f, \alpha, X)$ が一意的に存在する.

i) $\mathscr{L}_p(f, \alpha, X)$ は $\mathbb{Q}_p(\alpha)[[X]]$ の収束冪級数で大きさは $O(\log_p^h(1+X))$. ただし $h = \mathrm{ord}_p(\alpha)$.

ii) $u \in 1 + p\mathbb{Z}_p$ を円分指標による γ の像とする. $\chi : (\mathbb{Z}/p^n)^\times \to \mu_{p^\infty}$ を導手 $p^n \neq 1$ の Dirichlet 指標とし, $\chi(u) = \zeta$ とおく. また r

を $1 \leq r \leq k-1$ を満たす任意の自然数とする．このとき

$$\mathscr{L}_p(f, \alpha, u^r\zeta - 1) = (r-1)!\, p^{nr}\, \alpha^{-n}\, (2\pi i)^{k-r-1} \frac{L(f, \chi^{-1}, r)}{\tau(\chi^{-1})\Omega}.$$

$L(f, \chi, r)$ は $f \otimes \chi = \sum a_n \chi(n) q^n$ に伴う L-関数の $s = r$ での特殊値で，$\tau(\chi)$ は Gauss 和 $\sum_{a \bmod p^n} \chi(a)\, \zeta_{p^n}^a$ である．両辺とも $\overline{\mathbb{Q}}$ の元で $\overline{\mathbb{Q}}$ の中での等式である．

3　通常還元をもつ場合の岩澤主予想

ここでは簡単のため μ-不変量の曖昧さを許した形で主予想を紹介する．通常還元をもつ場合の主予想においては，次の２つの性質が本質的である．後でみるように，この２つの性質は $a_p = 0$ の岩澤理論では成り立たない．

i) $\mathscr{X}(\mathbb{Q}_\infty, T) \otimes \mathbb{Q}$ は有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間．

ii) $\mathscr{L}_p(f, \alpha, X) \in \Lambda \otimes \mathbb{Q}$.

ここで Euler factor の根 α の取り方は，通常還元をもつ場合は unique であることに注意しておく．ii) より Weierstraßの準備定理を使って p-進 L-関数の零点は有限個であることがわかる．

このとき (p 冪の曖昧さを許した弱い形の) 岩澤主予想はつぎのように述べられる．

p-進 L-関数の零点は，有限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間 $\mathscr{X}(\mathbb{Q}_\infty, T) \otimes \mathbb{Q}$ への γ-作用の固有値と，重複度を込めて一致する．

γ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の位相生成元であったことを思い出しておく．

この予想に関しては, K.KatoやK.Rubinらにより, 特別な場合に正しいことや(重複度をこめて)零点の集合の包含関係が知られている.

4 $a_p = 0$ のときの岩澤主予想

通常還元をもつときに本質的であった2つの性質は超特異なとき (i.e. $p \mid a_p$) はもはや成り立たない. $\mathscr{X}(\mathbb{Q}_\infty, T) \otimes \mathbb{Q}$ は無限次元 $\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間であり, p-進 L-関数は無限個の零点をもつと思われている. ($a_p = 0$ のときは実際にそうである.) これらのことから, 超特異な場合は通常還元をもつ場合のような素朴な主予想の定式化は困難に思える. それにもかかわらず, $a_p = 0$ のときは, Selmer群や p-進 L-関数を修正することにより, 主予想の定式化が可能であることをこれから紹介する.

まずR. Pollackの p-進 L-関数に関する結果を紹介する. (cf. [5])

対数関数を2つに分解して得られる関数 $\log_p^+(1+X)$ を次で定義する.

$$\log_p^+(1+X) = \frac{1}{p}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_{2m}(1+X)}{p}, \ \log_p^-(1+X) = \frac{1}{p}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_{2m-1}(1+X)}{p}.$$

ここで $\Phi_n(X)$ は円分多項式 $\Phi_n(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^{p^{n-1}i}$ である. そして $\log_{p,k}^{\pm}(1+X) = \Pi_{r=1}^{k-1} \log_p^{\pm}(1+u^{-r}X)$ とおく.

定理 . ある $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ の元 $\mathscr{L}^+(f, X)$ と $\mathscr{L}^-(f, X)$ が存在して, p-進

L-関数 $\mathscr{L}_p(f,\alpha,X)$ は次のようにかける.

$$\mathscr{L}_p(f,\alpha,X)=\mathscr{L}_p^{+}(f,X)\ \log_{p,k}^{-}(1+X)+\mathscr{L}_p^{-}(f,X)\ \log_{p,k}^{+}(1+X)\,\alpha.$$

この定理より, p-進 L-関数において本質的に重要なのは冪級数 $\mathscr{L}^{\pm}(f,X)$ であり, 通常還元をもつ場合と同じく $\Lambda\otimes\mathbb{Q}$ の元であることがわかる. そこで我々はこの Pollack の p-進 L-関数 $\mathscr{L}^{\pm}(f,X)$ と関係するような Selmer 群を定義したい. それは次のようにしてなされる.

定義 (偶奇 Selmer 群) Selmer 群 $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),T(r))$ の部分群 $\mathrm{Sel}^{\pm}(K,T(r))$ を次で定義する.

$$\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),T(r))\longrightarrow\frac{\mathrm{Im}\,H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V(r))}{\mathrm{Im}\,H^1_{f,\pm}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V(r))}\right).$$

ここで $H^1_{f,+}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),V(r))=\{P\in H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V(r))\mid$ 任意のn以下の正の奇数mに対し $\mathrm{Cores}_{n/m}P\in H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{m-1}}),V(r))\}$ である. 同様に正の偶数 m をはしらせることにより, $H^1_{f,-}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),V(r))$ を定義する. また Im は $H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V/T(r))$ への像を意味する.

$\mathbb{Q}_\infty$ 上の偶奇 Selmer 群 $\mathrm{Sel}^{\pm}(\mathbb{Q}_\infty,T)$ を $\varinjlim_n \mathrm{Sel}^{\pm}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}),T(r))(-r)^{\Delta}$ で定義し, その Pontryagin 双対を $\mathscr{X}^{\pm}(\mathbb{Q}_\infty,T)$ とおく. ここで r は $1\le r\le k-1$ を満たす整数で, $\mathscr{X}^{\pm}(\mathbb{Q}_\infty,T)$ は r の取り方によらない.

この Selmer 群は通常還元をもつ場合と同じく次の性質をもって

定理． $a_p=0$とする．このとき$\mathscr{X}^{\pm}(\mathbb{Q}_\infty,T)\otimes\mathbb{Q}$は有限次元$\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間．

$a_p=0$の場合の岩澤主予想を次のように定式化する．

予想　**Pollackのp-進L-関数$\mathscr{L}^{\pm}(f,X)$の零点は，有限次元$\mathbb{Q}_p$-ベクトル空間$\mathscr{X}^{\pm}(\mathbb{Q}_\infty,T)\otimes\mathbb{Q}$への$\gamma$-作用の固有値と，重複度を込めて一致する．**

通常還元をもつ場合と同様の条件下で，零点の集合の包含関係は示すことができる．

5　理論のKEY

この理論のKEYは$\Lambda\otimes\mathbb{Q}$に値をもつようなColeman写像の構成である．一般にColeman写像とは，局所岩澤加群を定義域としある種の冪級数環に値をもつ写像で，所謂ゼータ元(円単数，楕円単数，加藤ゼータ元など)をp-進L-関数に送るものをいう．我々の場合は加藤ゼータ元をPollackのp-進L-関数におくるColeman写像を構成する必要がある．その際重要になるのが，ノルムに関してあるよい性質をもつ局所有理点族の構成である．これはPerrin-Riou [4]の中で行われていることに他ならない．もう少し正確にいえば，次をみたす族$(c_{r,n})_{1\le r\le k-1,\, n=1,\ldots}$ $c_{r,n}\in H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),V(r))$が構成できる．

i) あるnによらない整数sがあって$c_{r,n}\in\frac{1}{p^s}H^1_f(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),T(r))$.

ii) $\mathrm{Cores}_{n+1/n}(\mathrm{c}_{r,n+1}) = -p^{k-2}\,\mathrm{c}_{r,n-1}$.

この族とp-進L-関数の関係は次のとおり．ペアリング

$$P_{r,n} : H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\ T(k-r)) \to \frac{1}{p^s}\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)],$$

$$z \mapsto (-1)^{[\frac{n}{2}]+r-1}(r-1)! \sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}_p)} p^{-s}(p^s\mathrm{c}_{r,n}^{\sigma},\ z)_{r,n}\ \sigma$$

を考える．ここで$(\ ,\ )_{r,n}$はcup積

$$H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\ T(r)) \times H^1(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}),\ T(k-r)) \to \mathbb{Z}_p$$

である．このペアリングは，r方向と，同じparityをもつn方向によい性質をもっており，これらを張り合わせることで我々の求めるColeman写像が構成される．ただ張り合わせを行うとき，nの偶奇に応じて$\log^{\pm}_{p,r}(1+X)$を取り除く作業をしなければならない．

上では整数sに関する曖昧さがあるが，pが$k-1$より大きければ曖昧さを取り除くこともできる．

最後にこの局所有理点族$(\mathrm{c}_{r,n})_{1\le r\le k-1,\ n=1,\dots}$の性質が，我々の定義した偶奇Selmer群の局所条件に反映されていたことに注意しておく．

参考文献

[1] S. Bloch and K. Kato, Tamagawa numbers of motives and L-functions, in The Grothendieck Festschrift, 1, Progress in Math. 86, Burkhäuser (1990), 333-400.

[2] K. Kato, P-adic Hodge theory and values of zeta funcions of modular forms, Preprint series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

[3] S. Kobayashi, Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes, Invent. math. 152 (2003) no. 1, 1–36.

[4] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), no. 1, 81–161.

[5] R. Pollack, On the p-adic L-function of a modular form at a supersingular prime, to appear from Duke.